

УДК 539.3

СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНЫХ НОРМАЛЬНОЙ И СКРУЧИВАЮЩЕЙ НАГРУЗОК НА ТОННель С КРУГОВОЙ КРЕПЬЮ

В.Н. Украинцев

Павлодарский государственный университет

E-mail: vitaliyu@list.ru

Получено решение задачи о воздействии подвижных нормальной и скручивающей нагрузок на бесконечно длинную цилиндрическую оболочку, находящуюся в упругом инерционном полупространстве. Полагается, что функции нагрузок могут быть разложены в ряд Фурье по угловой координате и интеграл Фурье по осевой координате. Движение оболочки описывается классическими уравнениями теории тонких оболочек, а упругого полупространства – динамическими уравнениями теории упругости в потенциалах Ламе, для решения которых используется метод интегрального преобразования Фурье. Настоящая задача является модельной для расчёта напряжённо-деформированного состояния массива пород при неравенстве динамических нагрузок, передаваемых на каждый из рельсов, уложенных в тоннеле цилиндрической формы, или при вращательном движении очистных устройств в подземном трубопроводе.

1. Задача о действии подвижной осесимметричной скручивающей нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде рассматривалась в работе [1]. Движение периодической нагрузки вдоль цилиндрической полости в упругом полупространстве изучалось в [2].

Аналогично [2] рассмотрим бесконечную круговую цилиндрическую полость радиуса R расположенную в упругом, однородном и изотропном полупространстве с параметрами Ламе λ , μ и плотностью ρ . В отличие от [2] полость подкреплена тонкой упругой оболочкой (в силу малости толщины оболочки полагаем, что окружающая среда контактирует с оболочкой вдоль её срединной поверхности) по внутренней поверхности которой с постоянной скоростью c поступательно движутся аperiodические нормальная и тангенциальная (скручивающая) нагрузки. Введём декартовую систему координат, ось Z которой совпадает с осью полости, параллельной свободной от нагрузок плоской границе полупространства, а ось X перпендикулярна к этой границе: $x \leq h$, где h – расстояние от оси полости до границы полупространства.

Вследствие того, что рассматривается установившийся процесс можно перейти к подвижной декартовой $(X, Y, \eta = Z - ct)$ или цилиндрической $(r, \theta, \eta = Z - ct)$ системе координат.

В подвижной системе координат для описания движения оболочки воспользуемся классическими уравнениями теории тонких оболочек (1), а для описания движения окружающей среды – динамическими уравнениями теории упругости (2):

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{(1 - \nu_0) \rho_0 c^2}{2\mu_0} \right] \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \eta^2} + \frac{1 - \nu_0}{2R^2} \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \theta^2} + \\ & + \frac{1 + \nu_0}{2R} \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{\nu_0}{R} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \eta} = - \frac{1 - \nu_0}{2\mu_0 h_0} q_\eta, \\ & \frac{1 + \nu_0}{2R} \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{(1 - \nu_0)}{2} \left(1 - \frac{\rho_0 c^2}{\mu_0} \right) \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \eta^2} + \\ & + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \theta} = \frac{1 - \nu_0}{2\mu_0 h_0} (P_\theta - q_\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\nu_0}{R} \frac{\partial u_{0\eta}}{\partial \eta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_{0\theta}}{\partial \theta} + \frac{h_0^2}{12} \nabla^2 \nabla^2 u_{0r} + \\ & + \frac{(1 - \nu_0) \rho_0 c^2}{2\mu_0} \frac{\partial^2 u_{0r}}{\partial \eta^2} + \frac{u_{0r}}{R^2} = - \frac{1 - \nu_0}{2\mu_0 h_0} (P_r - q_r), \end{aligned} \quad (1)$$

где $u_{0\eta}$, $u_{0\theta}$, u_{0r} – перемещения точек срединной поверхности оболочки; q_η , q_θ , q_r – составляющие реакции окружающей оболочку среды (при $r=R$ $q_\eta = \sigma_{\eta\eta}$, $q_\theta = \sigma_{\theta\theta}$, $q_r = \sigma_{rr}$, где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений в среде, $j = \eta, \theta, r$); ν_0 , μ_0 , ρ_0 – соответственно коэффициент Пуассона, модуль сдвига и плотность материала оболочки, h_0 – её толщина; $P_\theta(\theta, \eta)$, $P_r(\theta, \eta)$ – соответственно интенсивность скручивающей и нормальной нагрузки;

$$\left(\frac{1}{M_p} - \frac{1}{M_s} \right) \text{grad div } \mathbf{u} + \frac{1}{M_s} \nabla^2 \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \eta^2}, \quad (2)$$

где \mathbf{u} – вектор смещения упругой среды; $M_p = c/c_p$, $M_s = c/c_s$ – числа Маха; c_p , c_s – скорости распространения волн расширения – сжатия и сдвига в среде.

Так как граница полупространства свободна от нагрузок, то при $x=h$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{x\eta} = 0. \quad (3)$$

В случае жёсткого сцепления оболочки с окружающей средой

$$u_j \Big|_{r=R} = u_{0j}, \quad j = \eta, \theta, r. \quad (4)$$

Здесь u_r , u_θ , u_η – компоненты вектора \mathbf{u} .

Выразив вектор смещения упругой среды через потенциалы Ламе [3] $\mathbf{u} = \text{grad } \varphi_1 + \text{rot}(\varphi_2 \mathbf{e}_\eta) + \text{rot} \text{rot}(\varphi_3 \mathbf{e}_\eta)$, преобразуем (2) к виду

$$\nabla^2 \varphi_j = M_j \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \eta^2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (5)$$

где $M_1 = M_p$, $M_2 = M_3 = M_s$.

Применив к (5) преобразование Фурье по η , наводим

$$\nabla^2 \varphi_j^* - m_j^2 \xi^2 \varphi_j^* = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Здесь $m_j^2 = 1 - M_j^2$, $m_1 = m_p$, $m_2 = m_3 = m_s$,

$$\varphi_j^*(r, \theta, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(r, \theta, \eta) e^{-i\xi\eta} d\eta.$$

Представив компоненты напряжённо-деформированного состояния среды через потенциалы Ламе и применив преобразование Фурье по η , можно получить выражения для трансформант перемещений u_i^* и напряжений σ_{ij}^* в декартовой ($i=x, y, \eta$, $j=x, y, \eta$) и цилиндрической ($i=r, \theta, \eta$, $j=r, \theta, \eta$) системах координат как функции от φ_j^* .

Предположим, что скорость нагрузки меньше скорости распространения волн сдвига в окружающей полость среде. В этом случае $M_s < 1$ ($m_2 = m_3 = m_s > 0$), и решения уравнений (6) можно представить в виде

$$\varphi_j^* = \Phi_j^{(1)} + \Phi_j^{(2)}, \quad (7)$$

$$\text{где} \quad \Phi_j^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n(k_j r) e^{in\theta},$$

$$\Phi_j^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \exp(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}) d\zeta.$$

Здесь $K_n(k_j r)$ – функции Макдональда, $k_j = m_j \xi$, $g_j(\xi, \eta)$; a_{nj} – неизвестные функции и коэффициенты, подлежащие определению.

Как показано в [4], представление потенциалов в форме (7) приводит к следующим выражениям для трансформант потенциалов в декартовой системе координат:

$$\varphi_j^* = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + g_j(\xi, \zeta) e^{(x-h)f_j} \right] e^{iy\zeta} d\zeta, \quad (8)$$

$$\text{где } f_j = \sqrt{\zeta^2 + k_j^2}, \Phi_{nj} = \left(\frac{\zeta + f_j}{k_j} \right)^n, j = 1, 2, 3.$$

Воспользуемся переписанными для трансформант граничными условиями (3), с учётом (8). Выделяя коэффициенты при $e^{iy\zeta}$ и приравнявая, в силу произвольности y , их нулю, получим систему трёх уравнений, из которой выражаем $g_j(\xi, \zeta)$ через коэффициенты a_{nj} :

$$g_j(\xi, \zeta) = \sum_{k=1}^3 \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} e^{-hf_k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nk} \Phi_{nk}. \quad (9)$$

Вид определителя Δ и алгебраических дополнений Δ_{jk} определён в [4]. Там же показано, что Δ – определитель Релея, который не обращается в ноль, если скорость бегущей нагрузки меньше скорости релеевской волны в упругом полупространстве. В этом случае условия существования преобразования Фурье выполняются, и для вычислений интегралов (8) можно воспользоваться одним из численных методов интегрирования, предварительно определив коэффициенты a_{nj} .

Для дорелеевской скорости движущейся нагрузки соотношения (8) переписутся в виде

$$\varphi_j^* = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + e^{(x-h)f_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} e^{-hf_k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nk} \Phi_{nk} \right] e^{iy\zeta} d\zeta. \quad (10)$$

Для представления φ_j^* (7) в цилиндрической системе координат воспользуемся разложением

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) e^{in\theta}.$$

$$\begin{aligned} & \exp(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k^2}) = \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(kr) e^{in\theta} \left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 + k^2}}{k} \right)^n e^{-h\sqrt{\zeta^2 + k^2}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\varphi_j^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_{nj} K_n(k_j r) + I_n(k_j r) \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \Phi_{nj} e^{-hf_j} d\zeta \right) e^{in\theta}.$$

Подставляя в последнее выражение из (9) $g_j(\xi, \zeta)$, имеем

$$\varphi_j^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{nj} K_n(k_j r) + b_{nj} I_n(k_j r)) e^{in\theta}, \quad (11)$$

где

$$b_{nj} = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{mk} A_{nj}^{mk}, A_{nj}^{mk} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} \Phi_{mk} \Phi_{nj} e^{-h(f_k + f_j)} d\zeta.$$

Подставляя (10) и (11) соответственно в выражения для трансформант напряжённо-деформированного состояния (НДС) среды в декартовых и цилиндрических координатах, получим новые выражения, где неизвестными будут только коэффициенты a_{nj} . Для определения последних воспользуемся граничными условиями (4), представив их в виде

$$u_j^* \Big|_{r=R} = u_{0j}^*, j = \eta, \theta, r, \quad (12)$$

$$\text{где } u_{0j}^*(\theta, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{0j}(\theta, \eta) e^{-i\xi\eta} d\eta.$$

Применяя к (1) преобразование Фурье по η и разложив функции перемещений точек срединной поверхности оболочки и нагрузку в ряды Фурье по θ , для n -го члена разложения получим:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1^2 u_{0n\eta} + v_2 n \xi_0 u_{0n\theta} - 2i v_0 \xi_0 u_{0nr} = -G_0 q_{n\eta}, \\ & v_2 n \xi_0 u_{0n\eta} + \varepsilon_2^2 u_{0n\theta} - 2i n u_{0nr} = G_0 (P_{n\theta} - q_{n\theta}), \end{aligned} \quad (13)$$

$$2i v_0 \xi_0 u_{0n\eta} + 2i n u_{0n\theta} + \varepsilon_3^2 u_{0nr} = G_0 (P_{nr} - q_{nr}),$$

$$\text{где } \varepsilon_1^2 = \alpha_0^2 - \varepsilon_0^2, \quad \varepsilon_2^2 = \beta_0^2 - \varepsilon_0^2, \quad \varepsilon_3^2 = \gamma_0^2 - \varepsilon_0^2,$$

$$\varepsilon_0^2 = v_1 \xi_0^2 M_{s0}^2, \quad \xi_0 = \xi R, \quad \alpha_0^2 = 2\xi_0^2 + v_1 n^2,$$

$$\xi_0 = \xi R, \quad \beta_0^2 = v_1 \xi_0^2 + 2n^2, \quad \gamma_0^2 = \chi^2 (\xi_0^2 + n^2)^2 + 2,$$

$$v_1 = 1 - v_0, v_2 = 1 + v_0, M_{s0} = \frac{c}{c_{s0}},$$

$$c_{s0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}}, \chi^2 = \frac{h_0^2}{6R^2}, G_0 = -\frac{v_1 R^2}{\mu_0 h_0};$$

u_{0nm} , P_{nj} – соответственно коэффициенты разложения $u_{0m}^*(\theta, \xi)$ и $P_j^*(\theta, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} P_j(\theta, \eta) e^{-i\xi\eta} d\eta$ в ряды

Фурье по угловой координате θ ($j=\theta$; r ; $m=\eta$; θ ; r). При $r=R$ $q_{n\eta}=(\sigma_{r\eta}^*)_n$, $q_{n\theta}=(\sigma_{r\theta}^*)_n$, $q_{nr}=(\sigma_{rr}^*)_n$.

Разрешая (13) относительно $u_{0n\eta}$, $u_{0n\theta}$, u_{0nr} , находим

$$\begin{aligned} u_{0n\eta} &= G_0 \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_{\eta j}}{\delta_n} (P_{nj} - q_{nj}), \\ u_{0n\theta} &= G_0 \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_{\theta j}}{\delta_n} (P_{nj} - q_{nj}), \\ u_{0nr} &= G_0 \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_{rj}}{\delta_n} (P_{nj} - q_{nj}). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $\delta_n = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^2 - (\varepsilon_1 \xi_1)^2 - (\varepsilon_2 \xi_2)^2 + 2\xi_1 \xi_2 \xi_3$,

$$\delta_{\eta 1} = (\varepsilon_2 \varepsilon_3)^2 - \xi_1^2, \delta_{\eta 2} = D_1,$$

$$\delta_{\eta 3} = iD_2, \delta_{\theta 1} = D_1, \delta_{\theta 2} = (\varepsilon_1 \varepsilon_3)^2 - \xi_2^2, \delta_{\theta 3} =$$

$$= iD_3, \delta_{r1} = -iD_2, \delta_{r2} = -iD_3,$$

$$\delta_{r3} = (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 - \xi_3^2, \xi_1 = 2n, \xi_2 = 2v_0 \xi_0, \xi_3 =$$

$$= v_2 \xi_0 n, D_1 = \xi_0 n (4v_0 - \varepsilon_3^2 v_2),$$

$$D_2 = 2\xi_0 (\varepsilon_2^2 v_0 - n^2 v_2), D_3 = 2n (\varepsilon_1^2 - \xi_0^2 v_0 v_2);$$

$P_{n1}=0$, $P_{n2}=P_{n\theta}$, $P_{n3}=P_{nr}$; для q_{nj} индекс $j=1$ соответствует индексу η , $j=2-\theta$, $j=3-r$.

Подставляя (14) в (12) и приравнявая коэффициенты рядов Фурье-Бесселя при $e^{in\theta}$, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_{nj} .

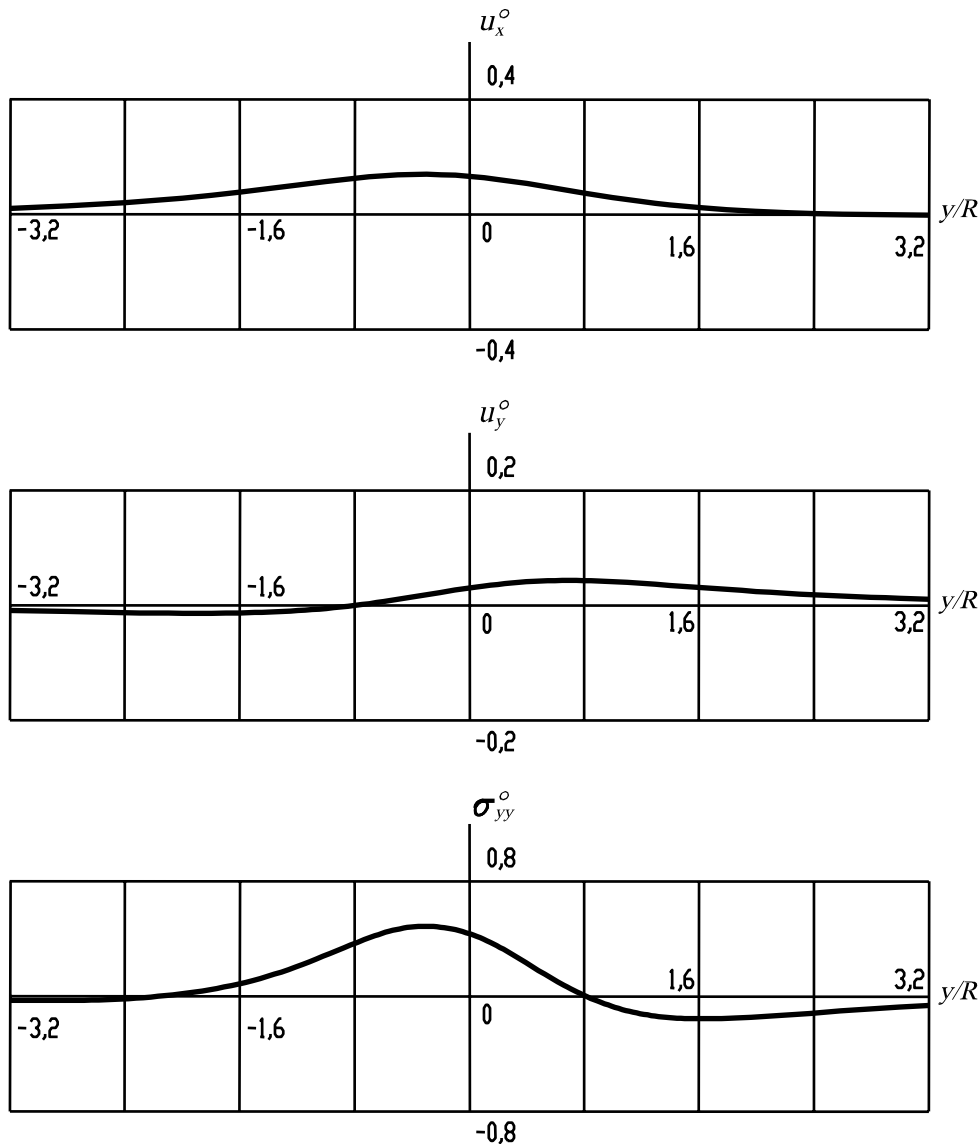


Рисунок. Изменения компонент НДС земной поверхности

После определения коэффициентов a_{nj} , используя обратное преобразование Фурье, можно вычислить компоненты НДС среды в декартовой и цилиндрической системах координат. При этом для вычисления интегралов Фурье можно использовать любой численный метод, если определитель полученной из граничных условий системы уравнений не обращается в ноль.

2. В качестве примера расчёты проводились для равномерно распределённых в интервале $|\eta| \leq 0,2$ м по внутренней поверхности бетонной оболочки осесимметричных нормальной и скручивающей нагрузок одинаковой интенсивности, движущихся со скоростью $c=100$ м/с в массиве алевролита при следующих значениях параметров: $R=1$ м, $h=2$ м, $h_0=0,02$ м; $v_0=0,2$, $\mu_0=12,1 \cdot 10^3$ МПа, $\rho_0=2,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda=1,688 \cdot 10^3$ МПа, $\mu=2,532 \cdot 10^3$ МПа, $\rho=2,5 \cdot 10^3$ кг/м³.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пожуев В.И. Действия подвижной скручивающей нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде // Строительная механика и расчет сооружений. — 1984. — № 6. — С. 58–61.
2. Айтиалиев Ш.М., Алексеева Л.А., Украинцев В.Н. Влияние свободной поверхности на тоннель мелкого заложения при действии подвижных нагрузок // Известия АН КазССР. 3. Сер. физ.-матем. — 1986. — № 5. — С. 75–80.

Интенсивность нормальной нагрузки выбиралась таким образом, чтобы общая нагрузка по всей длине участка нагружения равнялась сосредоточенной нормальной кольцевой нагрузке p .

На рисунке показан результат воздействия нагрузок на земную поверхность, где в поперечной плоскости ($\eta=0$) приведены кривые изменения перемещений $u_x^\circ = u_x \mu / p$ (м), $u_y^\circ = u_y \mu / p$ (м) и нормальных напряжений $\sigma_{yy}^\circ = \sigma_{yy} / p$.

Как следует из анализа поведения кривых, экстремальные прогибы u_x земной поверхности и экстремальные нормальные напряжения σ_{yy} имеют место при $y=-0,4R$, а максимальное горизонтальное смещение u_y — при $y=0,8R$ (σ_{yy} здесь равно нулю). С увеличением $|y|$ перемещения и напряжения быстро затухают, и при $|y|=3,2R$ динамическое воздействие нагрузки на земную поверхность практически неощутимо.

3. Новацкий В. Теория упругости. — М.: Мир, 1975. — 872 с.
4. Украинцев В.Н. Реакция упругого полупространства на бегущую вдоль оси периодическую нагрузку // Математический журнал. Алматы. — 2005. — № 3. — С. 96–102.

Поступила 05.06.2006 г.

УДК 624(007.2:57.085)

ОПТИМИЗАЦИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

А.Г. Юрьев, С.В. Ключев, А.В. Ключев

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

E-mail: Klyuyev@yandex.ru

Предложена методика оптимального проектирования несущих конструкций на основе генетического алгоритма. В качестве примера рассмотрено проектирование стальной рамы при варьировании 9 параметров с использованием метода конечных элементов. Выявлен наилучший вариант, соответствующий минимуму объема материала рамы.

В последние десятилетия в области инженерного дела, а также экономики и планирования намечается стремительный переход от допустимых инженерных и управленческих решений к оптимальным решениям. Однако современная теория оптимизации пока не удовлетворяет требованиям инженера-проектировщика в связи с тем, что ее строгие математические методы не учитывают реальных ситуаций проектно-конструкторских задач. Вместе с тем современная, все более усложняющаяся практика проектирования и конструирования нуждается в эффективных математических средствах решения таких задач.

Характерной чертой нового подхода является комплексная разработка, позволяющая проектировать систему в целом, а не по отдельным ее частям. Поэтому одной из чрезвычайно важных научных и

прикладных задач является разработка методологии оптимального проектирования сложных технических систем — системного проектирования.

Конструкцию характеризует ряд показателей: стоимость, надежность, вес, габариты, время разработки и др., которые могут находиться во взаимном противоречии. Трудность решения задачи состоит в недостатке априорной информации, необходимой для поиска оптимального варианта конструкции. Поэтому процедуру проектирования целесообразно строить так, чтобы на каждом его последующем этапе объем информации о конструкции возрастал. В то же время необходимо исключать неудовлетворительные варианты, выявленные в ходе проектирования. Таким образом, должны сочетаться две тенденции — генерация многообразия вариантов и усечение выявленного